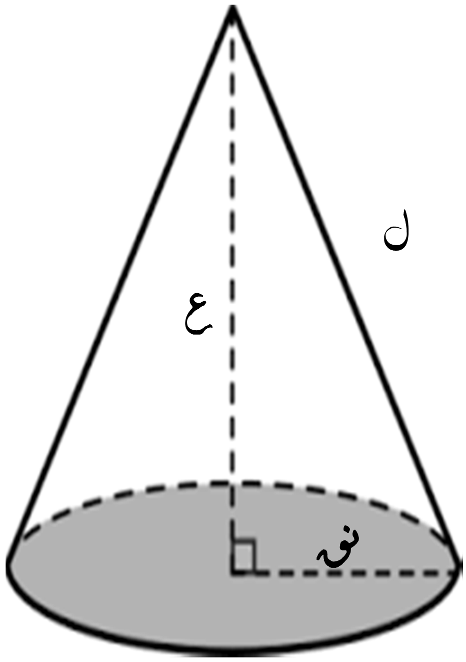
المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط القائم

❀ إذا كان نق طول نصف قطر قاعدة المخروط ، ل طول راسمه ، ع إرتفاعه فإن :

❀ المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

❀ المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

❀ حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع



ملاحظات

❀ محيط الدائرة = ٢ π نق

❀ مساحة الدائرة = π نق^{٢}

❀ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$

مثال ١

مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^{٢} وطول راسمه ١٣ سم أوجد

١ ـ مساحته الجانبية

٢ ـ مساحته الكلية

٣ ـ حجمه



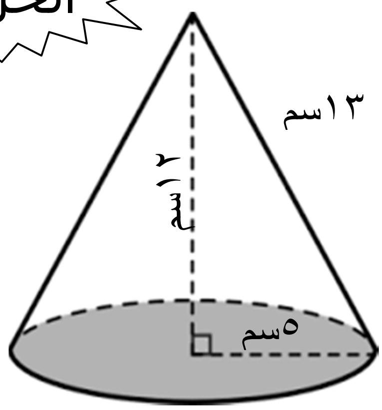


الحل

مساحة القاعدة = π نق^{٢}

π نق^{٢} = ٢٥ π

∴ نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم



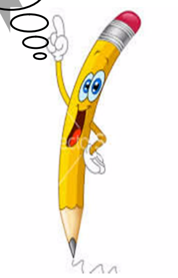
إرتفاع المخروط ع = $\sqrt{\text{ل}^{٢} - \text{نق}^{٢}} = \sqrt{١٣^{٢} - ٥^{٢}}$ = ١٢ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق = π x ١٣ x ٥ = ٦٥ π سم^{٢}

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق) = π x ٥ x (١٣ + ٥) = ٩٠ π سم^{٢}

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ π x ٢٥ x ١٢ = ١٠٠ π سم^{٣}

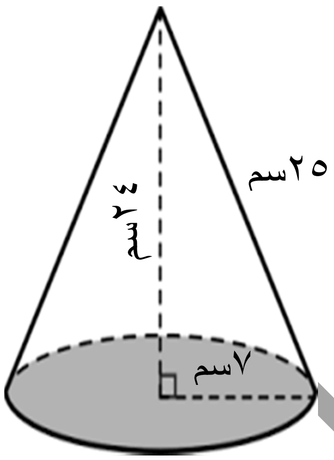
مثال ٢



مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم^{٢}

أوجد حجمه . [π = $\frac{٢٢}{٧}$]

الحل



المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق = ٥٥٠

$\frac{٢٢}{٧}$ x ٢٥ x نق = ٥٥٠

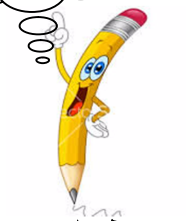
$\frac{٥٥٠}{٧}$ x نق = ٥٥٠

نق = ٥٥٠ x $\frac{٧}{٥٥٠}$ = ٧ سم .

إرتفاع المخروط ع = $\sqrt{\text{ل}^{٢} - \text{نق}^{٢}} = \sqrt{٢٥^{٢} - ٧^{٢}}$ = ٢٤ سم

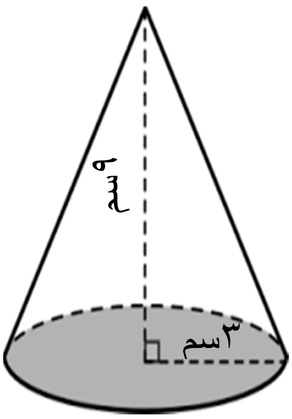
∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ x $\frac{٢٢}{٧}$ x ٤٩ x ٢٤ = ١٢٣٢ سم^{٣}

مثال ٣



إدارة فرشوط ٢٠١٦/٢٠١٥ قطعة من الشيكولاتة على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^{٣} ومحيط قاعدته ٦ π سم أوجد إرتفاعه

الحل



محيط القاعدة = ٢ π نق

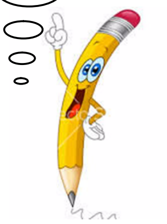
٢ π نق = ٦ π ⟸ نق = ٣ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = ٢٧ π

$\frac{١}{٣}$ × ٩ × ع = ٢٧

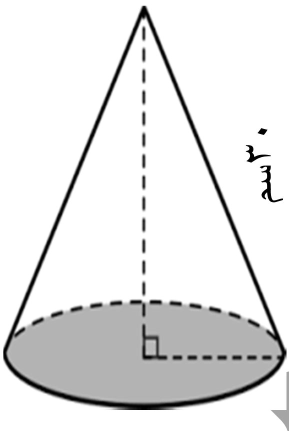
٣ × ع = ٢٧ ⟸ ع = ٩ سم

مثال ٤



أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^{٢} وطول راسمه ٣٠ سم .

الحل



المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

٦١٦ π = π نق (٣٠ + نق)

٦١٦ = ٣٠ نق + نق^{٢}

نق^{٢} + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

(نق − ١٤) (نق + ٤٤) = ٠

نق − ١٤ = ٠ ⟸ نق = ١٤ سم

نق + ٤٤ = ٠ ⟸ نق = − ٤٤ مرفوض .

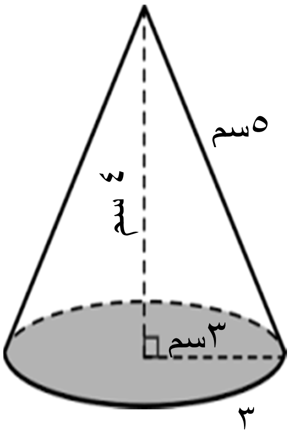
∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = ١٤ سم

مثال ٥

سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط دائرى قائم طول نصف قطر دائرته ٣ سم ومساحته الجانبية ١٥ π سم^٢ أوجد كثافة الذهب إذا كانت كتلة السبيكة ٧٢٧ جم .



الحل



المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق = ١٥ π

ل × ٣ = ١٥ ⟸ ل = ٥ سم .

إرتفاع المخروط ع = √(ل^٢ − نق^٢) = √(٥^٢ − ٣^٢) = ٤ سم

حجم المخروط = ١/٣ π نق^٢ ع = ١/٣ × ٣,١٤ × ٣^٢ × ٤ = ٣٧,٦٨ سم^٣

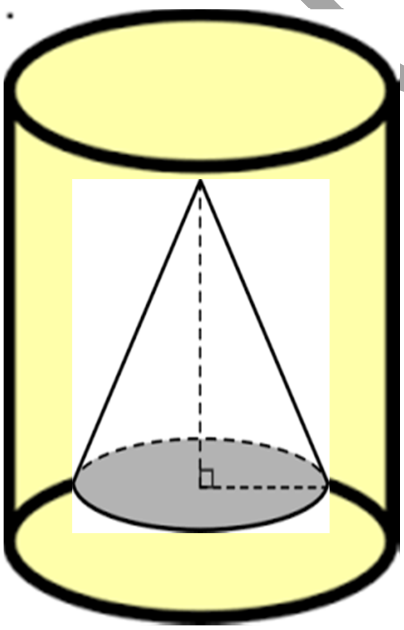
الكثافة = الكتلة / الحجم = ٧٢٧ / ٣٧,٦٨ ≃ ١٩,٣ جم / سم^٣

مثال٦

إناء اسطوانى الشكل به ماء غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم إرتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمر كاملا فأرتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء .



الحل



حجم المخروط = ١/٣ π نق^٢ ع

= ١/٣ π × ٢^٢ × ١٢ = ١٦ π

∴ حجم الماء المزاح = حجم المخروط = ١٦ π

حجم الأسطوانة = π نقَ^٢ عَ

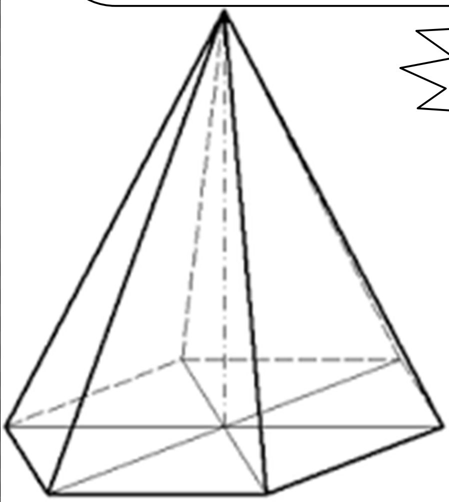
١٦ π = π نقَ^٢ × ١ ⟸ نقَ = √١٦ = ٤سم

∴ طول قطر قاعدة الإناء = ٢ × ٤ = ٨ سم .

مثال ٧



هرم خماسى منتظم من النحاس طول ضلع قاعدته ١٠ سم وإرتفاعه ٤٢ سم ، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم فإذا علم أن ١٠% من النحاس فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل أوجد إرتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد .

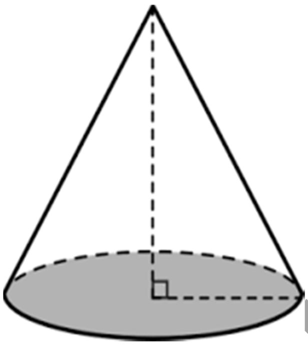


الحل

نوجد مساحة القاعدة :

$$م = \frac{١}{٤} ن س^{٢} ظتا \frac{\pi}{ن} = \frac{١}{٤} \times ٥ \times ١٠^{٢} ظتا \frac{١٨٠}{٥}$$

$$= ١٢٥ ظتا ٣٦ = \frac{١٢٥}{ظا٣٦} \simeq ١٧٢ \text{ سم}^{٢}$$



حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة $\times$ الإرتفاع

$$= \frac{١}{٣} \times ١٧٢ \times ٤٢ = ٢٤٠٨ \text{ سم}^{٣}$$

أثناء عملية صهر الهرم فقد ١٠% من النحاس

∴ نسبة حجم النحاس المتبقى = ٩٠% وهو الذى صنع منه المخروط .

∴ حجم المخروط = ٩٠% من حجم الهرم .

$$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٤٠٨ = ٢١٦٧,٢ \text{ سم}^{٣}$$

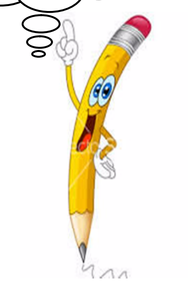
حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع$

$$٢١٦٧,٢ = \frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٥^{٢} \times ع$$

$$٢١٦٧,٢ = \frac{١٦٥٠}{٧} \times ع \Longleftarrow ع = \frac{٧ \times ٢١٦٧,٢}{١٦٥٠} \simeq ٩,٢ \text{ سم}$$

مثال ٨

قطاع دائرى م ٩ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصقا نصفا قطره ليكون اكبر مساحة جانبية لمخروط قائم أوجد حجم المخروط .

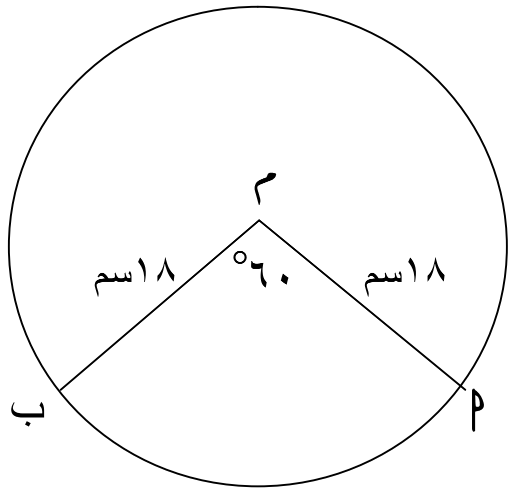


الحل

طول راسم المخروط = ١٨ سم $\Longleftarrow$ ل = ١٨سم

(الراسم هو نفسه طول نصف قطر دائرة القطاع الدائرى)

محيط قاعدة المخروط = طول $\overset{\frown}{\text{٩ب}}$

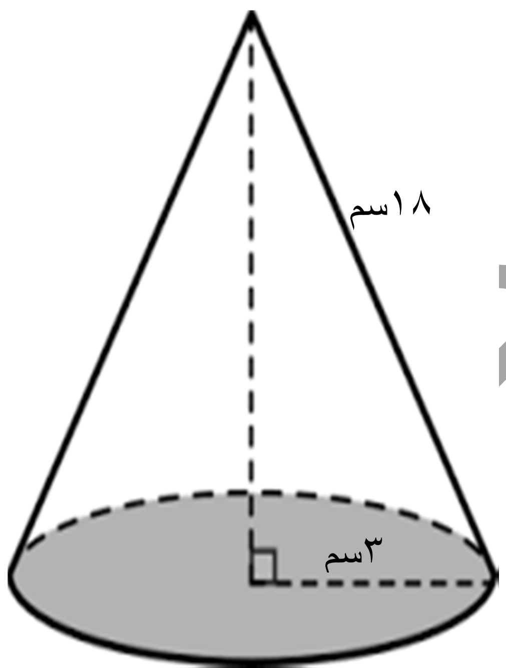


طول $\overset{\frown}{\text{٩ب}}$ = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ x محيط الدائرة .

= $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ x ٢ π x ١٨ = ٦ π سم

محيط قاعدة المخروط = ٦ π سم

٢ π نق = ٦ π $\Longleftarrow$ نق = ٣ سم



إرتفاع المخروط ع = $\sqrt{\text{ل}^٢ - \text{نق}^٢}$

= $\sqrt{١٨^٢ - ٣^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π x ٣^٢ x ٣ $\sqrt{٣٥}$ $\simeq$ ١٦٧,٣ سم^٣



تمارين(٨)

١ أكمل ما يأتى :-

١- حجم المخروط الدائرى القائم = ...

٢- المساحة الجانبية للمخروط الدائرى القائم = ...

٣- المساحة الكلية للمخروط الدائرى القائم = ...

٤- مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... $سم^٣$ ، ومساحته الكلية تساوى .... $سم^٢$

٥- مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وإرتفاعه ٢٠ سم فإن حجمه يساوى .... $سم^٣$ ، ومساحته الجانبية تساوى .... $سم^٢$

===

٢ إدارة ابوتشت٢٠١٥/٢٠١٦ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وإرتفاعه ١٥سم

أوجـــــد :- (١) مساحته الجانبية . [١٣٦ π $سم^٢$]

(٢) مساحته الكلية . [٢٠٠ π $سم^٢$]

(٣) حجمه . [٣٢٠ π $سم^٣$]

===

٣ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد المساحة الكلية لمخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وإرتفاعه ١٢ سم . [٢٨٢,٧ $سم^٢$]

===

٤ أوجد حجم مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وإرتفاعه ٢٥ سم .

(إعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) [١٢٨٣,٣ $سم^٣$]

٥ أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٠ سم ومساحته الكلية ٩٦ π سم^{٢} . [٦سم]

==

٦ صهريج مياه على شكل مخروط دائرى قائم حجمه ٣٢ π م^{٣} وإرتفاعه ٦ م أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية . [٤ م ، ١٤٠,٩م^{٢}]

==

٧ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر دائرته ٨ سم ومساحته الجانبية ٩٦ π سم^{٢} أوجد لأقرب رقم عشرى واحد حجم المخروط . [٥٩٩,٧ سم^{٣}]

==

٨ أيهما أكبر حجما : مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وإرتفاعه ٢٠سم أم هرم رباعى منتظم إرتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم .

[حجم المخروط = ٤٧١٢,٤ سم^{٣} ، حجم الهرم =١٩٢٠ سم^{٣} ، المخروط أكبر حجما]

==

٩ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم إرتفاعه ٢١ سم أوجد طول نصف قطر قاعدته إذا علم أن ١٢% من الشمع فقد أثناء عملية الصهر والتحويل (إعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) [$٨\sqrt{٥}$ سم]

==

١٠ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروط دائرى قائم أوجد إرتفاع المخروط . [٢٩,٢٤ سم]